JPPS

ISSN 1607-7083

# 統計薪傳

一份有趣、有用、有創意、有人性之全方位統計期刊

# JOURNAL OF PROPAGATIONS IN PROBABILITY AND STATISTICS

Volume 16 Number 1 June 2016

第十六卷 第一期 中華民國一百零五年六月

統領世紀 薪傳天下

JPPS ISSN 1607-7083

# 統 計 薪 傳

# Journal of Propagations in Probability and Statistics

A Comprehensive Journal of Probability and Statistics

for Researchers, Practitioners, Teachers, Students, and Others

**Volume 16 Number 1**

**June 2016**

**第十六卷 第一期**

**中華民國 105 年 6 月**

# 統 計 薪 傳

## *JPPS* ISSN 1607-7083

## *JOURNAL OF PROPAGATIONS IN PROBABILITY AND STATISTICS*


**Aims and Scope**: ***JPPS***, published semiannually in June and December (in February and August before 2003), is a multipurpose, comprehensive statistics journal that publishes articles of general interest to a broad audience of professionals, practicians, teachers, students, and any other users of statistics. All articles related to statistics or probability are welcome, including original research and review papers, notes on specific problems, technical and statistical practice reports, survey reports on public opinion or market research, essays on teaching methodology or experiences and the history of statistics, biographies of prominent statisticians, etc. It is our goal to disseminate the science of probability and/or statistics and its applications through the publication of ***JPPS***.


**Publication Date of First Issue**: August 1, 2000


**Submission and Review Policies**:

1) **PDF** document of the manuscript should be mailed to the **Editor-in-Chief** or **Managing Editor** through an email attachment. Similar to the *Canadian Journal of Statistics*, this journal welcomes articles written **either in English or in Chinese**.
2) A manuscript is accepted only with the understanding that the text has not appeared in any other publication, and that it is not being simultaneously reviewed by another journal.
3) Submitted manuscripts are reviewed by a mutually blind process, meaning that the reviewers will not know the names of the authors and vice versa.
4) If an article is approved for publication, the author(s) will be asked to provide an electronic copy of the paper, in **Micro-Soft WORD**, through an email attachment. The authors will also be required to transfer their copyright on certain conditions to Susan Rivers' Cultural Institute, Hsinchu City, Taiwan, ROC.




Last updated: **June 1, 2016**

*JPPS* ISSN 1607-7083

# 統 計 薪 傳

## *JOURNAL OF PROPAGATIONS IN PROBABILITY AND STATISTICS*

**宗 旨** 本刊物為一綜合性多元取向之統計期刊，內容涵蓋與機率或統計有關之學術研究、技術報告、教學經驗與心得、問題探討、實務應用、人物介紹與專訪、書評書介、市調民調、就業經驗以及大專學生或研究生之研究報告與學習心得等等不一而足。讀者與邀稿對象，上至學者專家、政府官員或企業主管，下至大專學生與社會大眾。機率與統計是應用廣泛的科學，隨著社會的日新月異與進步，它們的重要性愈形增加，每個人在日常生活中都可能遭遇和機率或統計有關的事物。藉由本期刊之發行, 我們傳播機率與統計的知識與常識，使它們能更普遍化、大眾化，促進社會的更進步，而前人之經驗與成就，亦能薪火傳承，並發揚光大。

**創刊年月** 公元 2000 年 8 月

*JPPS* ISSN 1607-7083

# 統　計　薪　傳

*JOURNAL OF PROPAGATIONS IN PROBABILITY AND STATISTICS*

## 投稿須知

本期刊登載與統計或機率有關之各類文章，來稿請作者儘量自行事先歸類，如學術論文、應用文摘、教學心得、書評書介、散文雜記等等。若有特定之讀者對象(如高中生、大專生、研究生等)，亦請註明。稿件將送請學者專家雙向隱名審閱，審閱通過後，請作者依本期刊最近一期之刊登格式以 **Microsoft Word** 自行打字排版，再以電子郵件附加檔寄送本期刊總編輯，以利編輯作業。其他注意事項如下:

1. 來稿文字應流暢精確，以電子郵件附加 **PDF 檔**投稿。
2. 較學術或專技性文稿請儘量附摘要(中文及英文)、關鍵字詞與參考文獻。
3. 翻譯或轉載稿件請附原文及原著作所有權人同意授權書。
4. 來稿請註明作者姓名、地址、服務機關或就讀學校、系所與年級，歡迎提供作者之重要學經歷。
5. 本刊對來稿內容中之次要文句有修飾權，未能刊登稿件恕不退還。
6. 審核通過並刊登於本期刊之稿件，其出版權歸魏蘇珊文教事業機構所有。
7. 刊登之文章格式大致如下：
   (a)中文文字部份，第一頁之題目與作者姓名請用標楷體，大小分別為 18 與 15；摘要、關鍵字詞、及作者簡介請用新細明體，大小依次分別為 11.5、11.5、及 11；正文之字體請用新細明體 12。英文請一律使用 Times New Roman 體。
   (b)打字請採橫式單欄，每列間隔以固定行高 18 pt 為原則，用紙以 A4 規格為準。
   (c)參考文獻中文部份請依姓氏筆劃列於前，英文部份請依作者姓氏字母先後列於後。期刊名稱請儘量用全名及斜體，例如 JASA 之全名為 *Journal of the American Statistical Association*。
8. 來稿請寄本期刊之總編輯(或客席總編輯)。

*JPPS* ISSN 1607-7083

# 統 計 薪 傳

## *Journal of Propagations in Probability and Statistics*

**Volume 16 Number 1 June 2016**

第十六卷 第一期 中華民國 105 年 6 月

## Table of Contents / 目 次



© Published by: Susan Rivers' Cultural Institute, Hsinchu City, Taiwan, ROC (魏蘇珊文教事業機構 發行)

*Journal of Propagations in Probability and Statistics*
**16**(1), 45-51 June 2016

統 計 薪 傳
第十六卷 第一期
民國 105 年 6 月 45-51 頁

# 關於統計模擬的一堂簡短入門課程

陳宇宏 張光昭
展欣科技企業公司 輔仁大學

**摘 要** 在統計學與機率學的學術與應用研究之中，蒙地卡羅模擬法是一種被研究者廣泛使用的方法。在這一篇教學短文裡，作者們藉由Chen and Chang [4]一文裡的一個例題，以比較簡單隨機抽樣與分層隨機抽樣的方式來介紹蒙地卡羅模擬法的基本概念。作者們希望本文的內容對於剛起步學習統計模擬的莘莘學子們有一些可用之處。

**關鍵字詞** 蒙地卡羅模擬、簡單隨機抽樣、分層隨機抽樣、有限母體、研究變數、母體大小、均方誤差。

---

□民國一百零五年二月收稿，一百零五年四月修訂、五月定稿。

□本文第一作者爲展欣科技企業有限公司負責人，電子郵址: techcom5054@hotmail.com；第二作者爲輔仁大學統計資訊學系專任教授；電子郵址: stat1016@mail.fju.edu.tw。

## 英文摘要/ English Abstract

# A Short Introductory Lesson on Statistical Simulations

**Ardor Chen** **Kuang-Chao Chang**
*Techcom Information Corp.* *Fu Jen Catholic University*

**ABSTRACT** Monte Carlo simulation is a widely used method by researchers in doing statistical/probabilistic research. In this short article, we introduce the basic concept of Monte Carlo simulation by comparing simple random sampling with stratified random sampling and using an example in Chen and Chang [4]. We hope the contents of this article can be useful to students who are beginners in learning statistical simulations.

***Keywords*** Monte Carlo simulation; Simple random sampling; Stratified random sampling; Finite population; Study variable; Population size; Mean squared error (MSE).

---

□Received February 2016, revised April 2016, in final form May 2016.

□Ardor Chen is the founder and CEO of Techcom Information Corp., Taipei, Taiwan, ROC; email: techcom5054@hotmail.com. Kuang-Chao Chang is a Professor in the Department of Statistics and Information Science at Fu Jen Catholic University, Hsinchuang, New Taipei City, Taiwan, ROC; email: stat1016@mail.fju.edu.tw.

 *JPPS*: ISSN 1607-7083

## 1. 前言

在統計學與機率學的學術與應用研究之中，蒙地卡羅模擬法是一種被研究者廣泛使用的方法。譬如，某一位統計學者提出某一種新的推估方法，爲了驗證新的推估方法是否優於一些現有的舊方法，於是這位統計學者採取蒙地卡羅模擬法來計算並比較新、舊推估方法的均方誤差，如果新方法的均方誤差較小，這就可算是初步驗證了新方法的優良性。如果這位統計學者能夠進一步搭配一些理論上的驗證，並且理論上的驗證結果與模擬試驗的結果大致相符，那麼新方法的優良性就可確定，而此一新推估方法之優良性的研究就可算是告一段落。這種類型的學術與應用研究，可說是屢見不鮮，例如參考文獻之中的 Chang *et al.* [1]、Chang *et al.* [2]、Chang *et al.* [3] 這幾篇論文，就是這種類型的研究。

在這一篇教學短文裡，作者們藉由 Chen and Chang [4] 一文裡的一個計算例題，以比較簡單隨機抽樣與分層隨機抽樣的方式來介紹蒙地卡羅模擬法的基本概念。模擬試驗的結果顯示，分層隨機抽樣優於簡單隨機抽樣。

## 2. 簡單隨機抽樣與分層隨機抽樣的比較

在 Chen and Chang [4] 一文之中有一個計算例題，如下:

計算範例　表 2.1之數據爲想像之中某一間大學某科系某班級的學生身高資料，以性別區分爲二個層別。

**表 2.1**　某大學某科系某班級的學生身高資料

| 男生(20 人) | | 女生(40 人) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 序號 | 身高(公分) | 序號 | 身高(公分) | 序號 | 身高(公分) |
| 1 | 181 | 21 | 162 | 41 | 168 |
| 2 | 168 | 22 | 160 | 42 | 157 |
| 3 | 172 | 23 | 155 | 43 | 153 |
| 4 | 165 | 24 | 159 | 44 | 164 |
| 5 | 169 | 25 | 156 | 45 | 151 |
| 6 | 173 | 26 | 164 | 46 | 163 |
| 7 | 178 | 27 | 166 | 47 | 155 |
| 8 | 166 | 28 | 160 | 48 | 165 |
| 9 | 170 | 29 | 158 | 49 | 162 |
| 10 | 162 | 30 | 165 | 50 | 152 |
| 11 | 184 | 31 | 152 | 51 | 162 |
| 12 | 168 | 32 | 159 | 52 | 164 |
| 13 | 175 | 33 | 150 | 53 | 163 |
| 14 | 179 | 34 | 166 | 54 | 164 |
| 15 | 163 | 35 | 154 | 55 | 165 |
| 16 | 164 | 36 | 151 | 56 | 159 |
| 17 | 176 | 37 | 156 | 57 | 171 |
| 18 | 172 | 38 | 148 | 58 | 152 |
| 19 | 171 | 39 | 152 | 59 | 156 |
| 20 | 174 | 40 | 160 | 60 | 154 |

若將這一個班級視爲一個**有限母體**(finite population)，每一位學生視爲一個元素，學生的身高

視爲**研究變數**(study variable)，則母體之中 60 位學生的研究變數值依序爲 $y_1 = 181,\ y_2 = 168, \cdots,$ $y_{60} = 154$。所以，

$$N = \textbf{母體大小}\text{(population size)} = \text{母體之中的元素總個數} = 60，$$

$$\mu = \text{母體平均數} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{60}(181+168+\cdots+154) = \frac{9783}{60} = 163.05。$$

我們暫且假裝不知道母體平均數 $\mu$ 的答案是多少，然後使用簡單隨機抽樣之方法從母體抽出 $n$ = 8 個元素，來估計母體平均數 $\mu$，那麼也就是要從 60 位學生之中隨機地抽出 8 位學生，而這就需要介於 1 與 60 之間的 8 個亂數，來選出 8 位學生。因此，我們從某一本統計學書籍中節錄一小部份的亂數表，如以下表 2.2 所示，以便稍後模擬抽樣之用。

表 **2.2**　從統計學書籍中節錄的一小部份亂數表

| | column | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| line | 1-5 | 6-10 | 11-15 | 16-20 | 21-25 | 26-30 | 31-35 | 36-40 |
| 1 | 62956 | 95735 | 70988 | 86027 | 27648 | 65155 | 46301 | 27217 |
| 2 | 17143 | 50118 | 41681 | 87224 | 75674 | 43371 | 09846 | 83403 |
| 3 | 99285 | 01369 | 94610 | 71099 | 69207 | 01999 | 23931 | 34711 |

我們就從表 2.2 的第一個橫列由左至右依序選取 8 個二位數字如後: 62、95、69、57、35、70、98、88。由於這 8 個亂數之中的 62、95、69、70、98、88 六個數字皆大於 60，所以必須將此六個數字減去 60，而得到 2、35、9、10、38、28。因此，原先選取的 8 個二位數字亂數就修正爲 2、35、9、57、35、10、38、28。但是，這 8 個修正之後的亂數之中的 35 出現了兩次，這就違反了簡單隨機抽樣是屬於“不置回抽樣”的基本原則。所以，我們將重複出現的亂數只保留出現一次，然後繼續抽取新的二位數字亂數(並加以修正，如果必要的話)，直到 8 個亂數完全沒有重複出現，才停止繼續抽取新的亂數。最後，我們得到 8 個完全沒有重複出現的修正後亂數如後: 2、35、9、57、10、38、28、60，這就是我們要隨機地抽出 8 位學生的序號，那麼抽得的 8 個身高值就是 168、154、170、156、162、148、160、154。雖然以上 8 個身高值也有重複出現的情形(154 出現兩次)，但是這可就沒有違反簡單隨機抽樣是屬於不置回抽樣的基本原則啦！因此，使用簡單隨機抽樣之方法來抽樣並推估母體平均數 $\mu$，其估計值爲樣本平均數，如下:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{8}(168+154+\cdots+154) = \frac{1272}{8} = 159。$$

接下來，如果我們採用分層隨機抽樣之方法從母體抽出 $n$ = 8 個元素，來估計母體平均數 $\mu$，那麼爲了抽樣的簡便，並考慮到母體之中的男生人數較少而女生人數較多，不妨從男生這一層抽出 $n_1 = 3$ 位學生，從女生層抽出 $n_2 = 5$ 位學生，如此一來樣本之中的男女生比例就和母體之中的男女生比例頗爲接近，同時 $n_1 + n_2 = 3 + 5 = 8 = n$。我們依然可以利用先前抽得的 8 個尚未修正之亂數: 62、95、69、57、35、70、98、88，來進行分層隨機抽樣，如下:

第一步　將 8 個亂數的前三個亂數乘以 0.2 倍之後再將小數點之後的數字四捨五入，變成爲介於 1 與 20 之間的三個整數: 12、19、14。然後，從男生這一層抽出序號爲這三個整數的三位學生，他們的身高值依序爲 168、171、179。

第二步　將 8 個亂數的後五個亂數乘以 0.4 倍之後再將小數點之後的數字四捨五入，然後再加上 20，變成爲介於 31 與 60 之間的五個整數: 43、34、48、59、55。隨後，從女生這一層抽出序號爲這五個整數的五位學生，她們的身高值依序爲 153、166、151、156、165。

有了以上二個步驟所抽得的樣本數據，則分層隨機抽樣的加權型態估計量所產生的估計值爲

$$\hat{\mu}_{\rm St}=\sum_{h=1}^{2}(\frac{N_h}{N})\overline{Y}_h=(\frac{20}{60})\overline{Y}_1+(\frac{40}{60})\overline{Y}_2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(168+171+179)\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}(153+\cdots+165)\right)$$
$$=\frac{518}{9}+\frac{1582}{15}=\frac{7336}{45}\approx 163.02\text{ 。}$$

由於母體平均數的標準答案是 $\mu=163.05$，因此就以 $\overline{Y}=159$ 與 $\hat{\mu}_{\rm St}=163.02$ 這兩個點估計值來相互比較，很顯然 $\hat{\mu}_{\rm St}=163.02$ 的估計誤差較小，也就是說，採用分層隨機抽樣較優於採用簡單隨機抽樣。 □

閱讀了以上例題之後，讀者或許會質疑，說不定以上的比較結果只是一種碰巧的情況；如果將先前抽得的 8 個亂數換成另外 8 個亂數，也許兩個不同估計值的比較結果會恰好相反也很難說喔! 那麼，有這種質疑的讀者，不妨自行去做一個計算性質的實驗，將先前抽得的 8 個亂數換成另外 8 個亂數，再重複以上整個抽樣與估計的過程，看看結果會怎樣! 如果每一次換成另外 8 個亂數再重複整個抽樣與估計的過程被視爲“一回合”的實驗，那麼本文作者們斗膽在此拍胸脯保證，十個回合的實驗之中，至少有八個回合的實驗結果，皆爲採用分層隨機抽樣較優於採用簡單隨機抽樣! 不過，做十個回合的實驗，還真是蠻辛苦的工作哦! 不妨偷個懶，做五個回合的實驗就好，如下例所示:

計算範例-續　使用五組不同的亂數，將先前例題的整個抽樣與估計過程進行五個回合的實驗，來比較分層隨機抽樣與簡單隨機抽樣的優劣。

解　由於在先前例題之中已經執行了一個回合的實驗，我們只需再增加四個回合的實驗即可。首先，我們進行第二回合的實驗。延續在先前例題之中已經抽出的 9 個二位數字亂數，我們從表 2.2 的第一個橫列的第九個二位數字亂數開始，由左至右依序再抽出 8 個沒有重複出現的二位數字亂數如後: 27、64、86、51、55、46、30、12，再將其中大於 60 的數字減去 60，而得到修正後的 8 個沒有重複出現之亂數如後: 27、4、26、51、55、46、30、12，而依據這 8 個亂數隨後抽得的 8 個身高值就是 166、165、164、162、165、163、165、168。因此，使用簡單隨機抽樣之方法來抽樣並推估母體平均數 $\mu$，其估計值如下:

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{8}(166+165+\cdots+168)=\frac{1318}{8}=164.75\text{ 。}$$

接下來，我們採用分層隨機抽樣分別從男生層與女生層抽出 $n_1=3$ 位男生以及 $n_2=5$ 位女生。我們依然可以利用先前抽得的 8 個尚未修正之亂數: 27、64、86、51、55、46、30、12，來進行分層隨機抽樣，如下:

第一步　將 8 個亂數的前三個亂數乘以 0.2 倍之後再將小數點之後的數字四捨五入，變成爲介於 1 與 20 之間的三個整數: 5、13、17。然後，從男生這一層抽出序號爲這三個整數的三位學生，他們的身高值依序爲 169、175、176。

第二步　將 8 個亂數的後五個亂數乘以 0.4 倍之後再將小數點之後的數字四捨五入，然後再加上 20，變成為介於 31 與 60 之間的五個整數: 40、42、38、32、25。隨後，從女生這一層抽出序號為這五個整數的五位學生，她們的身高值依序為 160、157、148、159、156。

有了以上二個步驟所抽得的樣本數據，分層隨機抽樣的加權型態估計值為

$$\hat{\mu}_{\mathrm{St}} = \sum_{h=1}^{2} W_h \bar{Y}_h = (\frac{20}{60})\bar{Y}_1 + (\frac{40}{60})\bar{Y}_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(169+175+176)\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}(160+\cdots+156)\right)$$

$$= \frac{520}{9} + \frac{1560}{15} = \frac{7280}{45} \approx 161.78 \text{ 。}$$

比較 $\bar{Y} = 164.75$ 與 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}} = 161.78$ 的估計誤差(絕對值)如下:

$$\bar{Y} \text{ 的估計誤差} = |\,\bar{Y} - \mu\,| = |164.75 - 163.05| = 1.7 \text{，}$$

$$\hat{\mu}_{\mathrm{St}} \text{ 的估計誤差} = |\,\hat{\mu}_{\mathrm{St}} - \mu\,| = |161.78 - 163.05| = 1.27 \text{ 。}$$

雖然兩個估計誤差的差距並不很大，但相比之下還是分層隨機抽樣的加權估計值其誤差較小，因此採用分層隨機抽樣依舊是優於採用簡單隨機抽樣。

仿照前二回合的實驗過程，從表 2.2 的第一個橫列繼續抽取亂數(如果第一個橫列的亂數已經用盡，就銜接到第二個橫列繼續抽取亂數，餘類推)，來進行第三至第五個回合的實驗，並將五個回合的實驗結果匯整於表 2.3:

**表 2.3**　五個回合的實驗結果

| 回合 | 8 個沒有重複但尚未修正之亂數 | 估計值 | | 估計誤差(絕對值) | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\bar{Y}$ | $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ | $\bar{Y}$ | $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ |
| 1 | 62、95、69、57、35、70、98、88 | 159 | 163.02 | 4.05 | 0.02 |
| 2 | 27、64、86、51、55、46、30、12 | 164.75 | 161.78 | 1.7 | 1.27 |
| 3 | 72、17、14、35、1、18、41、68 | 170.5 | 164 | 7.45 | 0.95 |
| 4 | 24、75、67、44、33、71、9、84 | 166.75 | 161.13 | 3.7 | 1.92 |
| 5 | 34、3、99、28、50、13、69、94 | 166 | 163.89 | 2.95 | 0.84 |

以上表 2.3 的第三回合之中，在進行分層隨機抽樣的時候須要再抽取兩個額外的亂數: 男生層抽取亂數 18、女生層抽取亂數 72。第四回合之中，進行簡單隨機抽樣的時候須要再抽取一個額外的亂數: 68。第五回合之中，在進行簡單隨機抽樣的時候須要再抽取一個額外的亂數: 61。

依據以上五個回合的實驗結果，分層隨機抽樣的加權估計量 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 在每一個回合的實驗皆優於簡單隨機抽樣的估計量 $\bar{Y}$ ，可說是五戰五勝！所以，原先可能有一些讀者會質疑先前例題的比較結果只是一種碰巧的情況，那麼現在經過了計算範例-續的五戰五勝，這些讀者的質疑應該降低了許多吧！不過，只是五戰五勝還是不足以比較兩種不同抽樣方法的優勝劣敗，我們應該進一步去分析每一個回合的優劣差距，才能夠做出較具有實質意義的比較。譬如說，甲乙兩個球隊進行五個回合的比賽，結果甲隊五戰五勝，但是每一場比賽甲隊都只是以些微

的得分差距而險勝乙隊，那麼甲乙兩隊的實力就相差不大，只是伯仲之間的實力差距而已！因此，我們不能僅僅比較每一個回合的勝或負，而應當進一步比較勝負的得分差距才更有意義！如果將表 2.3 的五回合實驗看成五場比賽，那麼第一和第三這兩場比賽，加權估計量 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 皆爲大勝，第二場爲小勝，第四和第五這兩場可視爲中勝，所以 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 與 $\bar{Y}$ 這兩個估計量的估計效果可就不僅僅是伯仲之間的差距，而是明顯地 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 勝於 $\bar{Y}$！如果從統計學的觀點來比較 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 與 $\bar{Y}$ 這兩個估計量，那就需要更進一步的計算與比較，算出每一個估計量的**均方誤差**(mean squared error，MSE)再相互比較才對喔！不過，就表 2.3 的五回合實驗來說，我們只能粗略地算出兩個估計量的近似均方誤差，或者說是均方誤差的估計值，如下:

$$\widehat{MSE(\bar{Y})} = \bar{Y}\text{ 的均方誤差估計值} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\text{第 } i \text{ 回合之 } \bar{Y} \text{ 的估計誤差})^2$$

$$= \frac{1}{5}[(4.05)^2 + (1.7)^2 + (7.45)^2 + (3.7)^2 + (2.95)^2] = \frac{97.1875}{5} = 19.4375\text{ ，}$$

$$\widehat{MSE(\hat{\mu}_{\mathrm{St}})} = \hat{\mu}_{\mathrm{St}}\text{ 的均方誤差估計值} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\text{第 } i \text{ 回合之 } \hat{\mu}_{\mathrm{St}} \text{ 的估計誤差})^2$$

$$= \frac{1}{5}[(0.02)^2 + (1.27)^2 + (0.95)^2 + (1.92)^2 + (0.84)^2] = \frac{6.9078}{5} = 1.38156\text{ 。}$$

比較以上兩個均方誤差的估計值，很顯然 $\widehat{MSE(\hat{\mu}_{\mathrm{St}})}$ 遠小於 $\widehat{MSE(\bar{Y})}$ ，所以分層隨機抽樣的加權估計量 $\hat{\mu}_{\mathrm{St}}$ 明顯地優於簡單隨機抽樣的估計量 $\bar{Y}$ 。 □

如果我們將以上計算範例-續的五個回合實驗提高至五千甚至一萬個回合的實驗，那麼這種高回合數的實驗結果，就會相當可靠並且被統計學家普遍採信，而這種借助於隨機亂數的高回合數實驗，就是赫赫有名的**蒙地卡羅模擬**(Monte Carlo simulation)法。當然，使用蒙地卡羅模擬法必須仰賴電腦語言程式以及相關統計套裝軟體的輔助，才能夠執行模擬過程之中的龐大計算。

如第一節的前言所述，蒙地卡羅模擬法經常被統計學家與機率學家運用於學術研究；如果一個研究議題經由蒙地卡羅模擬法的驗證，得到某一種結論，同時又能搭配某種程度之理論上的數學驗證，並且數學驗證的結論與模擬驗證的結論大致相符，那麼這就可算是一個成功的研究，可以撰寫成爲一篇正式的學術論文並嘗試發表於具有嚴格審查制度的學術期刊。

## 3. 結語

在這一篇教學短文裡，作者們以一個迷你型的五回合模擬實驗，來引進蒙地卡羅法的基本概念。因爲，五回合的模擬實驗與五千甚至一萬回合的實驗，其觀念與想法是完全一樣的。作者們希望本文的內容對於剛起步學習統計模擬的莘莘學子們有所助益。

## 參考文獻

[1] Chang, K. C., Han, C. P., and Hawkins, D. L. (1991). Improved estimators of regression coefficients in measurement error models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **39**, 21-35.

[2] Chang, K. C., Liu, J. F., and Han, C. P. (1998). Multiple inverse sampling in post-stratification, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **69**, 209-227.

[3] Chang, K. C., Han, C. P., and Hawkins, D. L. (1999). Truncated multiple inverse sampling in post-stratification, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **76**, 215-234.

[4] Chen, A. and Chang, K. C. (2015). A formula of degrees of freedom in stratified random sampling, *Journal of Propagations in Probability and Statistics*, **15**(2), 97-103. (Written in Chinese with English abstract)

 *JPPS*: ISSN 1607-7083